Métodos Iterativos para Ecuaciones no Lineales

Dr. Oldemar Rodríguez Rojas

Setiembre 2001

Contents

1 Métodos iterativos para ecuaciones no lineales **v**
1 El método de aproximaciones sucesivas v
1.1 Teoremas de convergencia y estudio del error v
1.2 El método de punto fijo para resolver ecuaciones de una variable x
2 Método de la Bisección xiv
3 Estudio del error xv
3.1 Note xv
4 Método de Newton-Raphson xv
4.1 OBS: xvi
5 Método de la Secante xvii
6 Análisis del error y técnicas de acelaración xix

Métodos iterativos para ecuaciones no lineales

1 El método de aproximaciones sucesivas

1.1 Teoremas de convergencia y estudio del error

Teorema 1 Sea U un subconjunto completo de un espacio normado X y $A : U \to U$ una contracción. Entonces las *aproximaciones sucesivas*:

$$x_{n+1} = Ax_x, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

con x_0 arbitrario en U converge al punto fijo único x de A.

Prueba Sea $x_0 \in U$ entonces definimos recursivamente la siguiente sucesión en U:

$$x_{n+1} := Ax_n, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

De donde se tiene que:

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leq q \|x_n - x_{n-1}\|,$$

luego por inducción se deduce que:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq q^n \|x_1 - x_0\|, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Por lo tanto para $m > n$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \cdots + \|x_{m-1} - x_m\| \\ &\leq \left(q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{m-1}\right) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Como $q^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy y como U es completo entonces existe $x \in U$ tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. ∎

Corolario 1 [Cota del Error a Priori] Con las mismas hipótesis del Teorema 1 se tiene el siguiente *estimado para el error a priori*:

$$\|x_n - x\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|.$$

Prueba Es evidente de la desigualdad (1.1). ∎

Corolario 2 [Cota del Error a Posteriori] Con las mismas hipótesis del Teorema 1 se tiene el siguiente *estimado para el error a posteriori*:

$$\|x_n - x\| \leq \frac{q}{1-q} \|x_n - x_{n-1}\| .$$

Prueba Se deduce del error a priori iniciando con $x_0 = x_{n-1}$. ■

Teorema 2 [Versión 1] Sea $D \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y sea $g : D \to D$ una función continuamente diferenciable con la siguiente propiedad:

$$q := \sup_{x \in D} |g'(x)| < 1.$$

Entonces la ecuación $g(x) = x$ tiene solución única $x \in D$ y la sucesión de aproximaciones sucesivas:

$$x_{n+1} := g(x_n), \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

con x_0 arbitrario en D converge a esta solución. Además se tiene el siguiente *estimado para el error a priori*:

$$|x_n - x| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| , \tag{1.2}$$

y el siguiente *estimado para el error a posteriori*:

$$|x_n - x| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| . \tag{1.3}$$

Si $D = [a, b]$ entonces se tiene también la siguiente cota del error:

$$|x_n - x| \leq q^n \max\{x_0 - a, b - x_0\}. \tag{1.4}$$

Prueba El espacio $\mathbb{R}$ equipado de la norma valor absoluto $|\cdot|$ es un espacio de Banach. Por el teorema del valor medio, para todo $x, y \in D$ con $x < y$ se tiene que:

$$g(x) - g(y) = g'(\xi)(x - y)$$

para algún punto $\xi \in]x, y[$. Por lo tanto:

$$|g(x) - g(y)| \leq \sup_{\xi \in D} |g'(\xi)| \cdot |x - y| = q |x - y| ,$$

lo cual también es válido para $x, y \in D$ con $x \geq y$. Por lo tanto g es una contracción, luego aplicando el Teorema de Banach o el Teorema 1 se tiene la existencia y únicidad del punto fijo. De los corolarios 1 y 2 se tienen obviamente las desigualdades (1.2) y (1.3). Para probar la cota del error (1.4) note que:

$$\begin{aligned}
|x_n - x| &\leq |g(x_{n-1}) - g(x)| = |g'(\xi_1)| \cdot |x_{n-1} - x| \leq q |x_{n-1} - x| \\
&= q |g(x_{n-2}) - g(x)| = |g'(\xi_2)| \cdot |x_{n-2} - x| \leq q^2 |x_{n-2} - x| \\
&\leq \cdots \\
&\leq q^n |x_0 - x| \\
&\leq q^n \max\{x_0 - a, b - x_0\}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 3 [Versión 2] Sea $g \in C[a,b]$, con $g : [a,b] \to [a,b]$. Entonces:

1. g tiene un punto fijo en $[a,b]$.

2. Además si $g'(x)$ existe en $]a,b[$ y $|g'(x)| \leq q < 1$, para todo $x \in]a,b[$ entonces g tiene un punto fijo único en $[a,b]$.

Prueba

1. *I Caso*: Si $g(a) = a$ o $g(b) = b$ se tiene la prueba.

   II Caso: Si $g(a) \neq a$ o $g(b) \neq b \Rightarrow g(a) > a$ o $g(b) < b$

   Tome $h(x) = g(x) - x$,note que:

   h es continua en $[a,b]$

   $h(a) = g(a) - a > 0$

   $h(b) = g(b) - b < 0$

   $\Rightarrow h(a)$ y $h(b)$ tienen signos opuestos, usando el teorema de los valores intermedios, se tiene que existe $x \in [a,b]$ tq $h(x) = 0 \Rightarrow g(x) - x = 0 \Rightarrow g(x) = x$, por lo x es el punto fijo de g.

2. Suponga que g tiene dos puntos fijos en $[a,b]$, sean estos x y y,con $x \neq y$, entonces por el Teorema del valor medio con $\xi \in]a,b[$ tal que:

   $$|x-y| = |g(x) - g(y)| = g'(\xi)\,|x-y| \leq q\,|x-y| < |x-y|$$

   de donde $|x-y| < |x-y|$, lo cual es una contradicción, luego se tiene que $x = y$.

■

Ejemplo 1 Pruebe que $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{6}$, $x \in [-1,1]$ tiene un punto fijo en $[-1,1]$.

Solucin: Se debe probar que $f(x) \in [-1,1]$ para todo $x \in [-1,1]$. Como $f'(x) = \dfrac{1}{6}(2x-2) = \dfrac{x-1}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ entonces los máximos o mínimos posibles están en $x = -1$ o $x = 1$. Como $f(-1) = \dfrac{1}{2}$ es máximo y $f(1) = -\dfrac{1}{6}$ es mínimo entonces para todo $x \in [-1,1]$ se tiene que $f(x) \in [-1,1]$, de donde f tiene un punto fijo en $[-1,1]$ (solo se ha probado que existe por lo menos un punto fijo, ahora tenemos que probar que es único).
Se debe existe $q < 1$ tal que $|\ f'(x)| \leq q < 1$, para todo $x \in\ ]-1,1[$. Nóte que:

FIGURE 1. El método de aproximaciones sucesivas.

$$| f'(x)| = \left| \frac{x-1}{3} \right| \leq \left| \frac{-1-1}{3} \right| \leq \frac{2}{3} < 1, \text{ para todo } x \in \quad]-1,1[,$$

Luego $f(x)$ tiene un punto fijo único en $[-1,1]$. ■

Teorema 4 Sea x un punto fijo de una función continuamente diferenciable g tal que $|g'(x)| < 1$. Entonces el métodos de la aproximaciones sucesivas $x_{n+1} := g(x_n)$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ es localmente convergente, es decir existe un vecindario $\mathcal{B}$ del punto fijo x de g tal que el método de aproximaciones sucesivas converge a x para $x_0 \in \mathcal{B}$.

Prueba Como g' es continua y $|g'(x)| < 1$ entonces existe una constante $0 < q < 1$ y $\delta > 0$ tal que $|g'(y)| < q$ para todo $y \in \mathcal{B} := [x-\delta, x+\delta]$. Entonces se tiene que:

$$|g(y) - x| = |g(y) - g(x)| \leq q\,|y - x| \leq |y - x| < \delta$$

para todo $y \in \mathcal{B}$ por lo que se deduce que g mapea $\mathcal{B}$ en si mismo, o sea que $g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ es una contracción, por lo que el resultado se tiene del Teorema 1. ■

El Teorema 4 se ilustra en la Figura 1.

Seguidamente se presenta un algoritmo en seudocódigo para el método de las aproximaciones sucesivas.

Algoritmo 1 [Para encontrar puntos fijos]

Entrada: p_0 (aproximación inicial), $Tol, N, g(x)$

Salida: p (punto fijo aproximado) o mensaje de error

Paso 1. $i \leftarrow 1$

Paso 2. Mientras $i \leq N$ siga los pasos 3–6
    Paso 3. $p \leftarrow g(p_0)$
    Paso 4. Si $|p - p_0| < Tol$
        Salida p
        Parar
    Paso 5. $i \leftarrow i + 1$
    Paso 6 $p_0 \leftarrow p$
Paso 7. Mensaje de error ("El método falló")
Parar

Una implementación iterativa en Mathematica es la siguiente:

```
PuntoFijo[P0_,Tol_,n_,G_]:=
    Module[{i=1,P0Tem=P0,Band=1},
    While[(i<=n)
        P=G[P0Tem];
        Print[''En la iteración '',i,'' el valor de P es '',
                N[P,15]];
        If[Abs[P-P0Tem]<Tol,Band=0];
        i++;
        P0Tem=P;
    ];
    If[i==n+1,Print[''El método no Converge'']];
    P
];
```

Una implementación recursiva en Mathematica es la siguiente:

```
PuntoFijoRecursivo[P0_,Tol_,N_,F_]:=
    Module[{P1=P0},
        P1=F[P0];
        If[(Abs[(P0-P1)]<Tol)||(N<=1),
            P,
            PuntoFijoRecursivo[P,Tol,N-1,F]
    ]
];
```

Ejemplo 2 Sea $F(x) = e^{-x}$. Es fácil probar que $F(x)$ mapea $A = [0.5, 0.69]$ en si mismo (ejercicio). Como F es continuamente diferenciable tome

$$q = \max_{x \in A} |\ F'(x)| = \max_{x \in A} \left|-e^{-x}\right| \approx 0.606531 < 1$$

Si se ejecuta el programa iterativo en Mathematica como sigue:

$$\texttt{N}[\texttt{PuntoFijo}[0.55, 0.000001, 30, \texttt{G}], 15]$$

es decir, tomando $p_0 = 0.55$ como aproximación inicial, con $\varepsilon = Tol = 10^{-6}$ para el algoritmo anterior obtenemos que el "punto fijo" de F es $p =$

$p_{19} = 0.567143650676$ (pues en p_{19} se terminó la ejecución del programa). Por otro lado el error absoluto al calcular $p_{12} = 0.567124201933893$ igual a:

$$|p - p_{12}| \approx 1.91 * 10^{-5},$$

mientras que usando el error a priori se obtiene es:

$$|p - p_{12}| \leq \frac{q^{12}}{1-q} |x_1 - x_0| = 1.70 * 10^{-4}$$

y usando el error a posteriori se obtiene que:

$$|p - p_{12}| < \frac{q}{1-q} |p_{12} - p_{11}| = 8.13 * 10^{-5}$$

que es una mejor estimación del verdadero error. Usando el error a priori se deduce que para obtener una precisión de $\varepsilon = 10^{-6}$ se requieren al menos de:

$$n \geq \log\left(\frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}\right) / \log(q) \approx 22.3 \leq 24 \text{ iteraciones,}$$

pero se observa que el programa requirió de 19 iteraciones.
Ejecutando la versión recursiva se obtiene el mismo resultado:

$$\texttt{N}[\texttt{PuntoFijo}\,\mathrm{Re}\,\texttt{cursivo}[0.55, 0.000001, 30, \texttt{G}], 15]$$

es decir, $p = 0.567143650676$.

1.2 *El método de punto fijo para resolver ecuaciones de una variable*

Ejemplo 3 Resuelva la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$.

Solucin: Se debe plantear un problema de encontrar lo puntos fijos de una función $g(x)$ que sea equivalente a resolver la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$. Resolver $x^3 - x - 1 = 0$ es equivalente a resolver la ecuación $x^3 - 1 = x$, entonces se puede tratar de encontrar los puntos de $g(x) := x^3 - 1$. Pero $g(x)$ no cumple las hipótesis del Teorema de punto fijo de Banach, pues $g'(x) = 3x^2 > 0 \Rightarrow g(x)$ es creciente en $[1, 2]$, luego $g(1) = 0$ y $g(2) = 7$ son el mínimo y el máximo en el intervalo $[1, 2]$ respectivamente, por lo que $g(x) \notin [1, 2] \quad \forall x \in [1, 2]$. Otro intento se puede hacer usando el hecho de que:

$$x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1 + \frac{1}{x}},$$

luego tome $g(x) := \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$, $g'(x) = -\dfrac{1}{2x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} < 0$ en $[1, 2]$, esto implica que $g(x)$ es decreciente en $[1, 2]$, luego $g(1) = \sqrt{2} \approx 1.41$ $g(2) =$

$\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1.22$ son un máximo y mínimo respectivamente de $g(x)$ en $[1,2]$, por lo que $g(x) \in [1,2] \quad \forall x \in [1,2]$, luego la función $g(x)$ tiene al menos un punto fijo en $[1,2]$.
Se probó que $g:[1,2] \to [1,2]$, falta probar que g es una función Lipchitz en el intervalo $[1,2]$. Veamos

$$g'(x) = -\frac{1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \Rightarrow |g'(x)| = \frac{1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \leq \frac{1}{2} := q < 1$$

de donde se puede tomar $q := \dfrac{1}{2}$. Ejecutando el programa de punto fijo con $p_0 = 2$ se obtiene:

```
G[x_] := Sqrt[1 + 1/x]
N[PuntoFijo[2,0.00001,30,G],15]
En la iteración 1 el valor de P es 1.22474487139159
En la iteración 2 el valor de P es 1.3477746773581
En la iteración 3 el valor de P es 1.31983475643837
En la iteración 4 el valor de P es 1.32577170214339
En la iteración 5 el valor de P es 1.32449147872207
En la iteración 6 el valor de P es 1.32476667564583
En la iteración 7 el valor de P es 1.32470747924203
En la iteración 8 el valor de P es 1.32472021086795
En la iteración 9 el valor de P es 1.32471747253653
```

Luego el punto fijo de $g(x)$ y solución de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ en el intervalo $[1,2]$ es: $x = 1.32471747253653$. Ejecutando la versión recursiva se obtiene la misma solución:

```
In[9]:=N[PuntoFijoRecursivo[2,0.00001,30,G],15]
Out[9]:=1.32471747253653
```

Usando el comando `Solve` de Mathematica se obtiene:

```
N[Solve[x^3 - x - 1 == 0, x]]
{{x->1.32472},{x->-0.662359+0.56228 I},{ x->-0.662359-0.56228
I}}
```

Que coincide con la solución encontrada por nuestro programa. Gráficamente se ilustra el la Figura 2 usando el comando de `Plot[{G[x],x},{x,0.1,3}]` de Mathematica.

■

Ejemplo 4 Dada la ecuación del ejemplo anterior $x^3 - x - 1 = 0$ en el intervalo $[1,2]$, ¿Cuántas iteraciones se requieren para obtener un error absoluto menor que 10^{-5}?

FIGURE 2. Grafico de $g(x)$ y de la función identidad.

Solucin: Recuerde que $q = \dfrac{1}{2}$ de donde se tiene que:

$$\begin{aligned} |p_n - p| &\leq q^n \max\{p_0 - a, b - p_0\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \max\{1, 0\} \text{ (con } p_0 = 2) \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n . \end{aligned}$$

Luego:

$$|p_n - p| \leq 10^{-5} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-5} \Leftrightarrow n \geq 16.6.$$

Tome $n = 17$. ■

Observación 1 En la práctica el programa requirió solamente 9 iteraciones.

Ejemplo 5 Para la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$, con $p_0 = 2$ estime usando el error a priori (1.2) ¿Cuántas iteraciones se requieren para obtener un error absoluto menor que 10^{-5}?

Solucin: Se tiene que

$$k = \frac{1}{2}, \quad p_0 = 2, \quad g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}.$$

De donde se obtiene que $p_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1.2$ entonces:

$$\begin{aligned}|p_n - p| &\leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} |2 - 1.2| \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 0.8,\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}|p_n - p| &\leq 10^{-5} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 0.8 \leq 10^{-5} \\ &\Leftrightarrow (n-1)(-\log(2)) \leq -5 - \log(0.8),\end{aligned}$$

esto implica que $n \geq 17.28$, por lo que se puede tomar $n = 18$. ■

Observación 2 En la práctica el programa requirió solamente 9 iteraciones.

FIGURE 3.

2 Método de la Bisección

Hipótesis
* f continua en [a,b]
*f(a) y f(b) tienen signos opuestos
$\therefore$por el teorema del valor intermedio existe p$\in [a, b]$ tq f(p)=0
Gráficamente
La idea es encontrar una sucesión $\{p_n\}_{n\in IN}$ tal que $p_n \underset{n\to\infty}{\to} p$ y f(p)=0
Para encontrar $\{p_n\}_{n\in IN}$
-Tome $a_1 = a, b_1 = b, p = \frac{a_1+b_1}{2}$
-Si $f(p_1) = 0$, termina $p = p_1$
si no
si $f(p_1)$ y f(a) tienen el mismo signo tome
$a_2 = p_1, b_2 = b_1, p = \frac{a_2+b_2}{2}$
si no
$a_2 = a_1, b_2 = p_1, p = \frac{a_2+b_2}{2}$
se sigue así hasta que f(p$_i$)$\cong$ 0,o hasta superar el némero de iteraciones

Algoritmo 2 Entrada: a, b, Tol (tolerancia), N, f
Salida: Aproximación de p, o mensaje de error
Paso 1. $i \leftarrow 2$
Paso 2. Mientras $i \leq N$, pasos 3-6
Paso 3. $p \leftarrow \frac{a+b}{2}$
Paso 4. Si $f(p) = 0$ o $\frac{|b-a|}{2} < Tol$
Sálida (p)
Parar
Paso 5.$i \leftarrow i + 1$
Paso 6. Si $f(a)f(p) > 0$
$a \leftarrow p$
Si no

$b \leftarrow p$

Paso 7. Sálida ("El método falló")

Parar

3 Estudio del error

Teorema 5 *Sea $f \in C[a,b]$, con $f(a)f(b) < 0$. Entonces el algortmo de la Bisección produce una sucesión $\{p_n\}_{n\in IN}$ que aproxima a p con un error absoluto $|p_n - p| < \frac{b-a}{2^n}$, $n \geq 1$.*

Prueba $|b_1 - a_1| = |b - a|$

$|b_2 - a_2| = \frac{1}{2}\ |b - a|$

.

.

.

$|b_n - a_n| = \frac{1}{2^{n-1}}\ |b - a|$

como $p \in]a_n - b_n[$ y $p_n = \frac{a_n+b_n}{2} \Rightarrow |p_n - p| \leq \frac{|b_n - a_n|}{2} \leq \frac{1}{2} * \frac{1}{2^{n-1}}\ |b - a| = \frac{1}{2^n}\ (b - a)$

Gráficamente

Obs:

$\cdot \frac{b-a}{2^n}$ es una cota superior del error

$\cdot\, |p_n - p| < \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow \frac{|p_n - p|}{\frac{1}{2^n}} < b - a = k$ (constante $\mathcal{O}(\frac{1}{2^n}) \Rightarrow p_n \to p$ con rápidez $\frac{1}{2^n}$ (muy rápido) ■

Ejemplo 6 *Para $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, con $a = 1$ y $b = 2$; hallar el N necesario para tener un error absoluto menor a $\varepsilon = 10^{-6}$*

Solución 1 $|p_n - p| < \frac{b-a}{2^n} < 10^{-6}$

$\Leftrightarrow 2^{-n} < 10^{-6}$

$\Leftrightarrow -n \log 2 < -6$

$\Leftrightarrow n > \frac{6}{\log 2}$

$\Leftrightarrow n > 19.9$

$\therefore$ *Tome* $n = 20$

3.1 Note

Que fue exactamente lo que requirió el programa

4 Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es uno de los más poderosos para resolver $f(x) = 0$

FIGURE 4.

·Deducción geométrica:

$$f\prime(x_i) = \frac{f(x_i)-f(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}} = \frac{f(x_i)-0}{x_i-x_{i+1}}$$

$$\Rightarrow x_i - x_{i+1} = \frac{f(x_i)}{f\prime(x_i)}$$

$$\Rightarrow x_{i+1} = \frac{f(x_i)}{f\prime(x_i)} + x_i \text{ (sucesión de Newton-Raphson)}$$

4.1 OBS:

Si $f \in C^2[a,b]$ el método se puede deducir usando el polinomio de Taylor alrededor de x_i.
El método de Newton-Raphson consiste en diseñar un algoritmo que calcule la sucesión

$$p_n = \begin{cases} p_o \text{ si n=0} \\ p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f\prime(p_{n-1})} \end{cases}$$

Algoritmo 3 Entrada: p_0, N, Tol, f
Salida: Solución aproximada de p o mensaje de error
Paso 1. $i \leftarrow 1$
Paso 2. Mientras $i \leq N$, pasos 3-6
Paso 3. $p \leftarrow p_0 - \frac{f(p_0)}{f\prime(p_0)}$
Paso 4. Si $|p - p_0| < Tol$
Sálida (p)
Parar
Paso 5. $i \leftarrow i+1$
Paso 6. $p_0 \leftarrow p$
Paso 7. Sálida ("El método falló")
Parar

Ejemplo 7 *Hallar un método para calcular* $\sqrt{A}$, *con* $A \geq 0$

Solución 2 *Calculando* $\sqrt{A}$ *es equivalente a resolver la ecuación* $x^2 - A = 0$, *usando Newton-Raphson con* $f(x) = x^2 - A$ *y* $f'(x) = 2x$
Se tiene que
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f\prime(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - A}{2x_n} \Rightarrow x_n = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n})$ *de donde es obvio que la sucesión* $x_n \to \sqrt{A}$ *cuando* $n \to \infty$

Teorema 6 * *Sea* $f \in C^2[a,b]$
*$p \in [a,b]$; *con* $f(p) = 0$
*$f\prime(p) \neq 0$
Entonces existe $\delta > 0$ *tal que el método de Newton-Rapson genera una sucesión* $\{p_n\}_{n\in IN}$ *que converge a* p, *con* $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$

Prueba Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f\prime(x)}$, note que $g(x) \in [a,b]$ y $g(p) = p$
Sea $p_n = \begin{cases} p_0 \text{ si } n = 0 \\ g(p_{n-1}) \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$ note que la $\{p_n\}$ es la sucesión de Newton-Rapson
Se debe probar que g(x) cumple las hipótesis del teorema de punto fijo, a saber
* $\exists \delta > 0$ tq. $\forall x \in]p-\delta, p+\delta[$, $|g\prime(x)| \leq k < 1$
* $g : [p-\delta, p+\delta] \to [p-\delta, p+\delta]$ (ejercicio)
$\Rightarrow g$ cumple las hipótesis del teorema de punto fijo en $[p-\delta, p+\delta]$
$\Rightarrow \{p_n\}_{n\in IN}$ converge a un punto fijo p de g(x) en $[p-\delta, p+\delta]$ ■

5 Método de la Secante

El problema con el método de Newton-Rapson es que requiere la derivada de f(x)
$f'(p_{n-1}) = \lim\limits_{n \to p_{n-1}} \frac{f(x)-f(p_{n-1})}{x-p_{n-1}} \approx \frac{f(p_{n-2})-f(p_{n-1})}{p_{n-2}-p_{n-1}}$
Si $p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f\prime(p_{n-1})}$ (Newton-Rapson)
$\Rightarrow p_n \approx p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{\frac{f(p_{n-2})-f(p_{n-1})}{p_{n-2}-p_{n-1}}}$

$$\Rightarrow p_n \approx p_{n-1} - \frac{(p_{n-2} - p_{n-1}) f(p_{n-1})}{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}$$

Método de la Secante

Entonces el método de la secante consiste en calcular la sucesión

$$p_n = \begin{cases} p_0 \text{ si } n = 0 \\ p_1 \text{ si } n = 1 \\ p_{n-1} - \frac{(p_{n-2}-p_{n-1})f(p_{n-1})}{f(p_{n-2})-f(p_{n-1})} \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$$

Algoritmo 4 Entrada: N, Tol, p_0, p_1
Salida: Aproximación de p, con f(p)=0 o mensaje de error
Paso 1. $i \leftarrow 2$

FIGURE 5.

Paso 2. Mientras $i \leq N$, pasos 3-6
  Paso 3. $p \leftarrow p_1 - \frac{(p_0 - p_1) f(p_1)}{f(p_0) - f(p_1)}$
  Paso 4. Si $|p - p_0| < Tol$
    Sálida (p)
    Parar
  Paso 5. $p_0 \leftarrow p_1$
    $p_1 \leftarrow p$
  Paso 6. $i \leftarrow i + 1$
Paso 7. Sálida ("El método falló")
  Parar

Ejemplo 8 *Resuelva la ecuación* $e^{-x} - x = 0$

Solución 3 *Aplicando el método de la secante se obtiene:*
$p_0 = 1$, $p_1 = \frac{1}{2}$

n	p_n
2	0.52456368
3	0.56414231
4	0.56742001
5	0.56714328
6	0.56714329

$\therefore p \cong 0.56714329$

6 Análisis del error y técnicas de acelaración

Definición 1 *Sea* $\{p_n\}_{n\in IN}$ *una sucesión que converge a p, sea* $e_n = |p - p_0|, n \geq 0$. *Si existen constantes* α *y* λ, *tal que:*
$\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{|p_{n+1}-p|}{|p_n-p|^{\alpha}} = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\alpha}} = \lambda$
Entonces se dice que :
* $\{p_n\}_{n\in IN}$ *canverge a p con orden* α *y con constante asintótica* λ
**Entre mayor sea el orden de convergencia, mayor será la "velocidad" de convergencia.*
**Si* $\alpha = 1$*, se llama orden lineal*
**Si* $\alpha = 2$*, se llama orden cuadrático*

Teorema 7 *Sea* $p_n = \begin{cases} p_0 \ si \ n = 0 \\ g(p_{n-1}) \ si \ n \geq 1 \end{cases}$ *el esquema de punto fijo visto en la sección 3.2. Si se supone que*
-$g : [a,b] \to [a,b]; g \in C[a,b]$
-$\exists k$, *con* $0 \leq k < 1$ *tq* $|g\prime(x)| \leq k < 1 \quad \forall x \in [a,b]$
-g *es continua en* $[a,b]$
Entonces $p_n \underset{n\to\infty}{\to} p$ *con orden 1 (p punto fijo)*

Prueba $|e_{n+1}| = |p_{n+1} - p| = |g(p_{n+1}) - g(p)| = |g'(\varsigma_n)(p_n - p)| =$
$=|g'(\varsigma_n)e_n|$ *con* ς_n *entre* p_n *y* p.
como $p_n \underset{n\to\infty}{\to} p \quad \Rightarrow \quad \varsigma_n \underset{n\to\infty}{\to} p$
$\Rightarrow \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{|g'(\varsigma_n)e_n|}{|e_n|} = \underset{n\to\infty}{Lim}|g'(\varsigma_n)| = \left|g'\underset{n\to\infty}{Lim}(\varsigma_n)\right| = g'(p)$
$\therefore \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = g'(p) = \lambda$ *(constante)*
$\therefore$*el orden de convergencia es linel* ■

Ejemplo 9 *Suponga que tenemos dos esquemas* p_n *y* $\widetilde{p_n}$ *tal que*
1. $\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = 0.75$ *(método lineal)*
2. $\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{\left|\widetilde{e}_{n+1}\right|}{\left|\widetilde{e}_n\right|^2} = 0.75$ *(método cuadrático)*
Supondremos que $e_0 = 0.5$ *y* $\widetilde{e}_0 = 0.5$
¿Cuántas iteraciones requieren p_n *y* $\widetilde{p_n}$ *para converger con error absoluto menor a* 10^{-8}*?*

Solución 4 *1. Analicemos la sucesión (esquema)* p_n
$|p_{n+1} - p| < 10^{-8} \Leftrightarrow |e_{n+1}| < 10^{-8}$
Pero $\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \cong 0.75$
$\Rightarrow |e_{n+1}| \cong 0.75\,|e_n| \cong 0.75^2\,|e_{n-1}| \cong ... \cong 0.75^n\,|e_0|$
$= 0.75^n * 0.5$
$\Rightarrow |e_{n+1}| < 10^{-8}$
$\Leftrightarrow 0.75^n * 0.5 < 10^{-8}$
$\Leftrightarrow n\log(0.75) < -8 - \log(0.5)$

$\Leftrightarrow n > \frac{-8-\log(0.5)}{\log(0.75)} - 1 \cong 61.62$

$\Rightarrow n = 62$ $\therefore p_n$ *requiere aproximadamente 62 iteraciones para converger a p*

2. Analicemos la sucesión $\widetilde{p}_n$

$\left|\widetilde{p}_{n+1} - p\right| < 10^{-8} \Leftrightarrow \left|\widetilde{e}_{n+1}\right| < 10^{-8}$

Pero $\frac{\left|\widetilde{e}_{n+1}\right|}{\left|\widetilde{e}_n\right|^2} \cong 0.75$

$\Rightarrow \left|\widetilde{e}_{n+1}\right| \cong 0.75\left|\widetilde{e}_n\right|^2 \cong 0.75[0.75\left|\widetilde{e}_{n-1}\right|^2]^2$

$= 0.75^3\left|e_{n-1}\right|^4 \cong 0.75^3[0.75\left|\widetilde{e}_{n-2}\right|^2]^4$

$= 0.75^5\left|\widetilde{e}_{n-2}\right|^8 \cong ... \cong 0.75^{2^{n+1}-1}\left|\widetilde{e}_0\right|^{2^{n+1}}$

de donde

$\left|\widetilde{e}_{n+1}\right| < 10^{-8}$

$\Leftrightarrow 0.75^{2^{n+1}-1}\left|\widetilde{e}_0\right|^{2^{n+1}} < 10^{-8}$

$\Leftrightarrow 0.75^{2^{n+1}-1} * 0.5^{2^{n+1}} < 10^{-8}$

$\Leftrightarrow 0.75^{-1} * 0.375^{2^{n+1}} < 10^{-8}$

$\Leftrightarrow 2^{n+1}\log(0.375) < -8 + \log(0.75.)$

$\Leftrightarrow 2^{n+1} > \frac{-8+\log(0.5.)}{\log(0.375)} \cong 19.07$

$\Leftrightarrow (n+1)\log(2) > \log(19.07)$

$\Leftrightarrow n > \frac{\log(19.07)}{\log(2)} - 1 \cong 3.24$

$\Rightarrow n = 4$

$\therefore \widetilde{p}_n$ *requiere n=4 iteraciones para converger a p*

Teorema 8 **Sea p una solución de g(x)=x*

**g'(p)=0*

g" es continua es un intervalo abierto que contiene a p

Entonces: existe $\delta > 0$ *tal que para* $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$ *la sucesión* $p_n = \begin{cases} p_0 \text{ si } n = 0 \\ g(p_{n-1}) \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$ *converge cuadraticamente.*

Prueba *Ejercicio* ■

Corolario 3 *El método de Newton -Rapson converge con orden cuadrático.*

Prueba *Usando el teorema anterior se concluye el colario, pues: con g(x)=x-*$\frac{f(x)}{f'(x)}$

**g(p)=p-*$\frac{f(p)}{f'(p)} = p$ *pues* $f(p) = 0$ *y f'(p)*$\neq 0$

**g'(x)=1*$-\frac{f\prime(x)f\prime(x)-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 - 1 - \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = -\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$

$\Rightarrow g'(p) = 0$, *pues f(p)=0*

Es claro que g" es continua en un intervalo que contiene a p, si se supone que f$\in C^3[a,b]$ ■

Convergencia Acelerada y Método de Steffensen

Método $\triangle^2$de Aitken
**Hipótesis*
1. $\{p_n\}_{n\in IN}$ *converge linealmente a* p *con constante asintótica* λ *tal que* $0<\lambda<1$ *[ie* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|}=\lambda$*]*
2. Todos los e_n *tienen el mismo signo*
3. Se asume que:
$\lambda \cong \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{p_{n+1}-p}{p_n-p} \cong \frac{p_{n+2}-p}{p_{n+1}-p} = \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} \cong \lambda$
Para n suficientemente grande se requiere encontrar $\{\hat{p}_n\}_{n\in IN}$ *tal que converge a p "más rápidamente" que* $\{p_n\}_{n\in IN}$.
Note que:
$\frac{p_{n+1}-p}{p_n-p} \cong \frac{p_{n+2}-p}{p_{n+1}-p}$
$\Rightarrow (p_{n+1}-p)(p_{n+1}-p) \cong (p_n-p)(p_{n+2}-p)$
$\Rightarrow p_{n+1}^2 - 2pp_{n+1} + p^2 \cong p_{n+2}p_n - pp_{n+2} - pp_n + p^2$
$\Rightarrow -2pp_{n+1} + pp_{n+2} + pp_n \cong -p_{n+1}^2 + p_{n+2}p_n$
$\Rightarrow (-2p_{n+1} + p_{n+2} + p_n)p \cong -p_{n+1}^2 + p_{n+2}p_n$
$\Rightarrow p \cong \frac{-p_{n+1}^2+p_{n+2}p_n}{(-2p_{n+1}+p_{n+2}+p_n)}$
$\Rightarrow p \cong \frac{p_{n+2}p_n-p_{n+1}^2}{p_{n+2}-2p_{n+1}+p_n}$ *(+ y - en el numerador* p_n^2 *y* $2p_np_{n+1}$*)*
$\Rightarrow p \cong \frac{p_n^2+p_{n+2}p_n-2p_np_{n+1}-p_n^2+2p_np_{n+1}-p_{n+1}^2}{p_{n+2}-2p_{n+1}+p_n}$
$\Rightarrow p \cong \frac{p_n(p_n+p_{n+2}-2p_{n+1})-(p_{n+1}-p_n)^2}{p_{n+2}-2p_{n+1}+p_n}$
$\Rightarrow p \cong p_n - \frac{(p_{n+1}-p_n)^2}{p_{n+2}-2p_{n+1}+p_n}$
El método de $\triangle^2$*de Aitken se basa en de que la sucesión*

$$\hat{p} := p_n - \frac{(p_{n+1}-p_n)^2}{p_{n+2}-2p_{n+1}+p_n}$$

converge "más rapidamente" a p que la sucesión $\{p_n\}_{n\in IN}$
Notación: Diferencia Progresiva
$\triangle\, p_n = p_{n+1} - p_n,\ \ n \geq 0$
$\triangle^k\, p_n = \triangle^{k-1}\, (\triangle\, p_n),\ k \geq 2$
Obstante
***$\triangle^2\,(p_n) = \triangle\,(\triangle\, p_n) = \triangle\, p_{n+1} - \triangle\, p_n$
$= p_{n+2} - p_{n+1} - (p_{n+1} - p_n)$
$= p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n$
Con esta notación el método de Aitken se escribe como

$$\hat{p} := p_n - \frac{(\triangle\, p_n)^2}{\triangle^2\, p_n}$$

Pero que quiere decir que una sucesión $\tilde{p}$ *converge más rápido a p que* p_n.

Definición 2 *Sean* $\{p_n\}_{n\in IN}$ *y* $\{\tilde{p}_n\}_{n\in IN}$ $\triangle^2$*dos sucesiones que convergen a p, se dice que* $\{\tilde{p}_n\}_{n\in IN}$ *converge más rápido a p que* $\{p_n\}_{n\in IN}$ *si:*

$\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{\widetilde{p}_n-p}{p_n-p}=0, \qquad p_n-p\neq 0$

Teorema 9 *Sea* $\{p_n\}_{n\in IN}$ *una sucesión que converge a p con orden lineal, además se asume que* $e_n=p_n-p\neq 0,\ \forall n$
Entonces $\hat{p}:=p_n-\frac{(\triangle p_n)^2}{\triangle^2 p_n}$ *converge a p más rápido que* $\{p_n\}_{n\in IN}$
Prueba *Ejercicio* ■

Método de Steffensen: para acelerar el método de punto fijo
$p_0^{(0)}$
$p_1^{(0)}=g(p_0^{(0)})$
$p_2^{(0)}=g(p_1^{(1)})$
$p_0^{(1)}=\triangle^2(p_0^{(0)})=p_0^{(0)}-\frac{(p_1^{(0)}-p_0^{(0)})^2}{p_2^{(0)}-2p_1^{(0)}+p_0^{(0)}}$
$p_1^{(1)}=g(p_0^{(1)})$
$p_2^{(1)}=g(p_1^{(1)})$
$p_0^{(2)}=\triangle^2(p_0^{(1)})=p_0^{(1)}-\frac{(p_1^{(1)}-p_0^{(1)})^2}{p_2^{(1)}-2p_1^{(1)}+p_0^{(1)}}$
.
.
.

Algoritmo 5 Entrada: N, Tol, p_0, g
Salida: Aproximación de p o mensaje de error
Paso 1. $i\leftarrow 2$
Paso 2. Mientras $i\leq N$, pasos 3-6
Paso 3. $p_1=g(p_0)$
$p_2=g(p_1)$
$p=p_0-\frac{(p_1-p_0)^2}{p_2-2p_1+p_0}$
Paso 4. Si $|p-p_0|<Tol$
Sálida (p)
Parar
Paso 5. $i\leftarrow i+1$
Paso 6. $p_0\leftarrow p$
Paso 7. Sálida (”El método falló”)
Parar