Elementos Básicos de Análisis Funcional en Análisis Numérico

Dr. Oldemar Rodríguez Rojas

Agosto 2001

Contents

Elementos Básicos de Análisis Funcional

En los siguientes capı́tulos se presentarán métodos iterativos para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, para la solución numérica de ecuaciones diferenciales, etc. Para hacer esto necesitaremos algunos conceptos y teoremas del análisis funcional.

1 Espacios normados

Definicin 1 Sea X un espacio vectorial complejo (o real). Una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0$,
2. $\|x\| = 0$ si y solamente si $x = 0$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

   para todo $x, y \in X$ y para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) se llama *norma* en X. El espacio vectorial X provisto de una norma se llama *espacio normado*.

Ejemplo 1 Algunas normas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son:

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|,$$

para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$.

Las normas del ejemplo 1 son conocidas como las normas ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_∞ respectivamente. Las tres normas anteriores son casos particulares de la norma ℓ_p:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \tag{1.1}$$

definida para $p \geq 1$. La norma ℓ_∞ es el lı́mite de 1.1 cuando $p \to \infty$ (ejercicio).

Proposicin 1 *Para toda norma se tiene la segunda desigualdad triangular.*

$$|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\|,$$

para todo $x, y \in X$.

Prueba De la desigualdad triangular se tiene que

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

por lo tanto $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Análogamente cambiando el rol de x y y se tiene que $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$ por lo que se obtiene la desigualdad. ■

Definicin 2 Para dos elementos x, y en un espacio normado X la norma $\|x - y\|$ se llama *distancia* entre x y y.

Definicin 3 Una sucesión (x_n) de elementos en un espacio normado X se llama *convergente* si existe un elemento $x \in X$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0,$$

es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero $N(\varepsilon)$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$ para todo $n > N(\varepsilon)$. El elemento x es llamado el *límite* de la sucesión (x_n) y se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Si una sucesión no converge se llama *divergente*.

Proposicin 2 *El límite de una sucesión convergente es único.*

Prueba (Ejercicio) ■

Definicin 4 Dos normas en un espacio vectorial se llaman *equivalentes* si tienen el mismo conjunto de sucesiones convergentes.

Teorema 1 Dos normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ en un espacio vectorial X son equivalentes si y solamente si existen números positivos c y C tal que:

$$c\,\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C\,\|x\|_a \tag{1.2}$$

para todo $x \in X$.

Prueba Sean las normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ equivalentes, suponga que no existe $C > 0$ tal que $\|x\|_b \leq C\,\|x\|_a$ para todo $x \in X$, entonces existe una sucesión (x_n) con $\|x_n\|_a = 1$ y $\|x_n\|_b \geq n^2$. Luego la sucesión $y_n := x_n/n$ converge a cero con respecto a $\|\cdot\|_a$ pero no con respecto a $\|\cdot\|_b$ porque $\|y_n\|_b \geq n$. Recíprocamente si se tiene 1.2 entonces si $\|x_n - x\|_a \to 0$ es claro que $\|x_n - x\|_b \to 0$ y viceversa. ■