MA0501 Análisis Numérico I
Prof. Oldemar Rodríguez Rojas
Fecha de entrega: Viernes 27 noviembre del 2014
Segundo examen parcial: Viernes 5 diciembre del 2014

Tarea Número 7

1. Implemente en Mathematica funciones para todos los algoritmos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales vistos en clase.

2. Complete los detalles de las demostraciones que quedaron pendientes en este capítulo.

3. Implemente en Mathematica el método de aproximaciones sucesivas propuesto mediante la ecuación de Volterra visto en clase. Luego resuelva un ejemplo.

4. Para los problemas de valor inicial:

$$y' = -2ty^2, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$y' - y = \cos(t), \quad y(0) = 1/2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

   (a) Generar una tabla con cada uno de los métodos del ejercicio anterior con $N = 10$
   (b) Encuentre la solución exacta usando Mathematica.
   (c) Mediante alguno de los métodos interpolación vistos en el curso, interpole cada una de las soluciones obtenidas, luego grafique en un mismo plano la solución exacta y el polinomio obtenido.
   (d) ¿Cuál de los métodos permitió obtener una mejor solución aproximada?

5. Muestre que el método de Euler falla al aproximar la solución $u(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}$ para el problema de valor inicial $u' = u^{1/3}$, $u(0) = 0$. Explique porqué falla.

6. Demuestre que el método de un paso dado por:

$$u_{j+1} = u_j + hf\left(x_j + \frac{h}{2}, u_j + \frac{h}{2}f(x_j, u_j)\right)$$

   es consistente y que si f es dos veces continuamente diferenciable entonces tiene orden dos (este método se conoce como el método de *Euler Modificado*). Implemente este método en Mathematica y resuelva las ecuaciones diferenciales del problema 2, luego grafique.

7. Demuestre que el método de un paso dado por:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_j, u_j),\\
k_2 &= f\left(x_j + \frac{h}{3}, u_j + \frac{h}{3}k_1\right),\\
k_3 &= f\left(x_j + \frac{2h}{3}, u_j + \frac{2h}{3}k_2\right)\\
u_{j+1} &= u_j + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3),
\end{aligned}$$

   es consistente y que si f es tres veces continuamente diferenciable entonces tiene orden tres (este método se conoce como el método de *Tercer Orden de Heun*). Implemente este método en Mathematica y resuelva las ecuaciones diferenciales del problema 2, luego grafique.

8. Demuestre que el método de un paso dado por:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_j, u_j),\\
k_2 &= f\left(x_j + \frac{h}{2}, u_j + \frac{h}{2}k_1\right),\\
k_3 &= f\left(x_j + h, u_j - hk_1 + 2hk_2\right)\\
u_{j+1} &= u_j + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3),
\end{aligned}$$

es consistente y que si f es tres veces continuamente diferenciable entonces tiene orden tres (este método se conoce como el método de *Tercer Orden de Runge–Kutta*). Implemente este método en MATHEMATICA y resuelva las ecuaciones diferenciales del problema 2, luego grafique.

9. La idea de este ejercicio es introducir la matriz exponencial e^A para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales.

DEFINICIÓN: Dada una sucesión $\{C_k\}$ de matrices $m \times n$ cuyos elementos son números reales o complejos, se se denota por c_{ij}^k la entrada ij de C_k, entonces si todas mn series:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^k \text{ con } i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$$

son convergentes, se dice que la serie de matrices $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ es convergente y su suma es la matriz cuya entrada ij es la $\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^k$.

(a) Pruebe que si $\{C_k\}$ es una sucesión de matrices $m \times n$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|$ converge entonces la serie de matrices $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ también es convergente.

(b) Pruebe que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ es convergente.

DEFINICIÓN: Dada una matriz A, $n \times n$ con elementos reales o complejos, se define la matriz exponencial como la matriz $n \times n$ dada por:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

(c) Verifique que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ entonces $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$.

(e) Verifique que si $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ entonces $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}$.

(f) Pruebe que para todo $t \in \mathbb{R}$ la función matricial $E(t) = e^{tA}$ satisface la ecuación diferencial matricial:

$$E'(t) = E(t)A = AE(t).$$

(g) Dada una matriz A, $n \times n$ con elementos reales o complejos, pruebe que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$e^{tA}e^{-tA} = I$$

o sea que e^{tA} es no singular y su inversa es e^{-tA}.

(h) Pruebe que si A y B son dos matrices $n \times n$ con elementos reales o complejos tales que $AB = BA$ entonces:

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

(i) Pruebe que dada una matriz A, $n \times n$ con elementos reales o complejos y un B un vector de n entradas, entonces el problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} Y'(t) &= AY(t) \\ Y(0) &= B, \end{aligned}$$

tiene solución única con $t \in \mathbb{R}$ y que esta solución está dada por:

$$Y(t) = e^{tA} B.$$

(j) Pruebe que si una matriz cuadrada A es diagonalizable, es decir que si existe una matriz C no singular tal que la matriz $D = C^{-1}AC$ es diagonal, entonces:

$$e^{tA} = Ce^{tD}C^{-1}.$$

(k) Escriba una función en Mathematica que reciba una matriz A diagonalizable y retorne e^{tA}. Para esto puede usar la función `Eigenvalues[A]` de Mathematica.

(l) Verifique que si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $e^{tA} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -e^t - 2e^{4t} & -e^t + e^{4t} \\ -2e^t + 2e^{4t} & -2e^t - e^{4t} \end{pmatrix}$.

(ll) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 3x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) + 2x_2(t) \end{aligned}$$

sujeto a $x_1(0) = 90$ y $x_2(0) = 150$.

(m) Escriba una función en Mathematica que reciba una matriz A con los coeficientes de un sistema de ecuaciones diferenciales, las condiciones iniciales en una lista de pares y retorne una lista con las soluciones del sistema ecuaciones diferenciales.

(n) Usando el programa resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 3x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_3'(t) &= 5x_3(t) \end{aligned}$$

sujeto a $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$ y $x_3(0) = 3$.

Sistemas de ecuaciones no lineales

10. El sistema no lineal:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 &= 0 \\ x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

puede ser transformado en un problema de punto fijo como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2 + x_2^2 + 8}{10} &= g_1(x_1, x_2) = x_1, \\ \frac{x_1x_2^2 + x_1 + 8}{10} &= g_2(x_1, x_2) = x_2. \end{aligned}$$

Pruebe que $G := (g_1, g_2)$ tiene un punto fijo único en $D := \{(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$ tal que $0 \leq x_1$ y $x_2 \leq 1{,}5\}$. Luego aplique el método de punto fijo para resolver este sistema.

11. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de punto fijo (pruebe antes que se cumplen la hipótesis del teorema):

$$\begin{array}{rcccl} F_1(x,y) & = & 2x^2 - xy - 5x + 1 & = & 0 \\ F_2(x,y) & = & x + 3\log_{10} x - y^2 & = & 0 \end{array}$$

12. El *Método Simplificado de Newton* tiene el siguiente esquema de iteración:

$$x_{n+1} := x_n - \left[F'(x_0)\right]^{-1} F(x_n), \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $F'(x)$ es la matriz Jacobiana de F. Geométricamente en $\mathbb{R}$ esto quiere decir que la recta tangente a F en x_n es reemplazada por la recta paralela a la recta tangente a F en x_0 pasando por el punto $(x_n, F(x_n))$. Escriba una función en *Matematica* para este método y luego resuelva los ejercicios 10 y 11. Compare la velocidad del método simplificado de Newton con respecto al método de Newton.

Encuentre un sistema de ecuaciones no lineales lo más grande posible y resuélvalo con método simplificado de Newton.