MA0501 Análisis Numérico I
Prof. Oldemar Rodríguez Rojas.
Fecha de entrega: Viernes 14 de noviembre del 2014.

Tarea Número 6

1. Implemente en *Mathematica* los algoritmos de derivación numérica vistos en clase, se deben implementar los siguientes:

   Der2Puntos[Xo_,h_]

   (* Calcula la derivada de F usando la formula de 2 puntos *)

   Der3PuntosA[Xo_,h_]

   (* Calcula la derivada de F usando la formula de 3 puntos - formula A *)

   Der3PuntosB[Xo_,h_]

   (* Calcula la derivada de F usando la formula de 3 puntos - formula B *)

   Der5PuntosA[Xo_,h_]

   (* Calcula la derivada de F usando la formula de 5 puntos - formula A *)

   Der5PuntosB[Xo_,h_]

   (* Calcula la derivada de F usando la formula de 5 puntos - formula B *)

2. Sea $f(x) = x^3 e^{x^2} - sen\, x$. Para $h = 0{,}01$ y $h = 0{,}001$, aproxime $f'(2{,}19)$ usando todos los métodos implementados arriba. Compare con el valor exacto. ¿Cuál es la mejor aproximación?

3. Agrege al archivo anterior una función para la *Extrapolación de Richardson*, que permita trabajar con fórmulas del tipo $N(x_0, h)$.

4. Se puede probar la siguiente fórmula progresiva para calcular derivadas

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_0+h) - f(x_0)] - \frac{h}{2}f''(x_0) - \frac{h^2}{2}f'''(x_0) + O(h^3)$$

   Aplique extrapolación de Richardson para aproximar derivadas con la fórmula anterior. Luego repita el ejercicio 2 con este método.

5. Implemente en *Mathematica* los algoritmos de integración numérica vistos en clase, se deben implementar los siguientes:

   Trapecio[a_, b_]

   (* Calcula la integral de F de a hasta b, usando la regla del Trapecio *)

   Simpson[a_, b_]

   (* Calcula la integral de F de a hasta b, usando la regla de Simpson *)

   SimpsonCompuesta[a_, b_, m_]

   (* Calcula la integral de F de a hasta b, usando la regla de Simpson Compuesta *)

   Romberg[a_, b_, n_]

   (* Calcula la integral de F de a hasta b, usando la el Metodo de Romberg *)

   IntegralDobleSCT[a_, b_,n_,m_]

   (* Calcula la integral doble de F en regiones de tipo I usando Simpsom Compuesto *)

6. Calcule

$$\int_0^{\pi} (4 + 2sen\, x)\, dx$$

   mediante todos los métodos programados arriba (excepto el último).

7. ¿Cuál debe ser el valor de n según las cotas teóricas del error para aproximar la integral

$$\int_0^{\pi} (8 + 5sen\, x)\, dx$$

con 4 cifras significativas mediante la regla de Simpson Compuesta. Calcule la integral con este valor de n. ¿Cuál es realmente el valor de n necesario?

8. Calcule $ln(2)$ usando:

$$ln(2) = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

mediante la regla de Simpson Compuesta. ¿Cuál es el menor valor de n que puede garantizar 6 cifras significativas en el cálculo de $ln(2)$?

9. Use el procedimiento de integrales dobles para calcular el área limitada por la párabola $y = 4x - x^2$, el eje X, y sobre la recta $y = -3x + 6$. Resuelvalo también usando *Mathematica* directamente.

10. Usando el procedimiento de de integración múltiple calcule el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano xy. Resuelvalo también usando *Mathematica* directamente.

11. La *Regla de Trapecio Extendida* se presenta en el siguiente teorema:

    TEOREMA: Sea $f \in C^2[a,b]$, con $h = (b-a)/n$ y $x_j = a + jh$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n$, la REGLA DEL TRAPECIO PARA n SUBINTERVALOS es

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right] - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\mu)$$

    para alguna $\mu \in]a,b[$.

    (a) Pruebe el teorema anterior.
    (b) Escriba un algoritmo en pseudo-codigo para la regla del trapecio extendida.
    (c) Implemente en *Mathematica* la regla del trapecio extendida.

12. Calcule

$$\int_0^2 x^2 e^{-x^2}\, dx$$

usando la regla de trapecio extendida para $n = 8$.

13. Sea f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ 2x + 5 & \text{si} \quad 2 \le x \le 6 \end{cases}$$

    (a) Aproxime $\int_0^6 f(x)\, dx$ usando la regla del trapecio extendida.
    (b) Aproxime $\int_0^6 f(x)\, dx$ usando la regla de Simpson compuesta.
    (c) ¿Cuál resultado es mejor?

14. Escriba un algoritmo en pseudo-código para calcular integrales dobles tipo I basado en la regla del Trapecio Extendida, luego agrege este algorimo al módulo de integración numérica.

15. Repita los ejercicios 9 y 10 usando el algoritmo del ejercicio anterior.

16. Sea

$$f(x) = \int_0^x cos(t^2)dt$$

(a) Interpole $f(x)$ con nodos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$, $x_5 = 2\pi$, $x_6 = \frac{5\pi}{2}$, $x_5 = 3\pi$, usando alguno de los métodos vistos en el curso. **Sug.** Recuerde que $\int cos(t^2)dt$ no ha podido ser calculada en término de funciones elementales.

(b) Grafique el polinomio $p(x)$ y la función $f(x)$ en un mismo plano.

(c) Dé dos razones por las cuales a priori se sabe que la interpolación anterior para $f(x)$ es "mala".

17. Determine a, b, c en la fórmula de cuadratura:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(-\alpha) + bf(0) + cf(\alpha) + \mathcal{E}(f)$$

en función de α, tal que tenga una exactitud algebraica igual a 3, por lo menos.

18. Repita el ejercicio anterior pero con exactitud algebraica igual a 5.

19. Demuestre la regla de Simpson a partir de la fórmula de cuadratura

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \mathcal{E}(f)$$

y usando el hecho de que la fórmula de Simpson tiene exactitud algebraica igual a 3.

20. Demostrar que existe una constante positiva c tal que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)dx = \frac{1}{3}[f(-c) + f(0) + f(c)] + \mathcal{E}(f)$$

tiene exactitud algebraica igual a 3.

21. Determine la constantes a y b, tal que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, dx = \frac{1}{4}\left[af(b) + bf(a)\right] + \mathcal{E}(f)$$

tenga exactitud algebraica igual a 3, por lo menos.

22. Demuestre que existen constantes $c_1 \in [a, b]$ y $c_2 \in [a, b]$ tal que la fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2}\left[f(c_1) + f(c_2)\right] + \mathcal{E}(f)$$

tiene exactitud algebraica igual a 3, por lo menos.

23. Usando integración numérica escriba un procedimiento MATHEMATICA que permita obtener para una función dada $f(x)$ su polinimio trigonométrico $S_n(x)$, es decir, una aproximación a su *Serie de Fourier*, para esto:

(a) Si se definen:

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \\
\phi_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \text{ con } k = 1, 2, \ldots, n, \\
\phi_{n+k}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \text{ con } k = 1, 2, \ldots, n-1.
\end{aligned}$$

Pruebe que $\mathcal{B} = \{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}\}$ es un conjunto ortogonal con el producto interno integral en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Dada $f \in C[-\pi, \pi]$ su polinimio trigonométrico $S_n(x)$ de define como:

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \phi_k(x),$$

donde:

$$a_k := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi_k(x)dx \quad \text{para cada } \; k = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

El límite:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \phi_k(x)$$

se denomina la *Serie de Fourier* de f. Usando las definiciones anteriores, escriba funciones en MATHEMATICA para $\phi_0(x), \phi_k(x)$ y $\phi_{n+k}(x)$.

(b) Usando alguno de los métodos de integración numérica numérica programados arriba escriba una función en MATHEMATICA para calcular:

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi_k(x)dx \quad \text{para cada } \; k = 0, 1, \ldots, 2n-1$$

(c) Programe una función MATHEMATICA para la suma:

$$S(n, x) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \phi_k(x).$$

(d) Con el programa anterior encontrar $S_n(x)$ con $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ para

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

luego grafique $f(x)$ y $S_n(x)$ en un mismo plano para $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.