MA0501 Análisis Numérico I
Prof. Oldemar Rodríguez R.
Fecha de entrega: Jueves 28 de octubre del 2014

Tarea Número 5

1. Implemente en MATHEMATICA los algoritmos de interpolación polinómica vistos en clase, los métodos simbólicos deben retornar el polinomio. Los métodos que se deben implementar son:

   a) Interpolar $f(x)$ usando el polinomio de Lagrange con el algoritmo de Neville.

   b) Interpolar $f(x)$ usando el polinomio de Lagrange con el algoritmo de Neville usando la una función f.

   c) Interpolar $f(x)$ usando el polinomio de Lagrange con el algoritmo de diferencias dividas de Newtón.

   d) Interpolar $f(x)$ usando el polinomio de Lagrange con el algoritmo de diferencias dividas de Newtón usando la función f.

   e) Interpolar $f(x)$ usando el polinomio de Hermite con el algoritmo de diferencias dividas de Newton.

   f) Interpolar $f(x)$ usando el polinomio de Hermite con el algoritmo de diferencias dividas de Newton usando la función f.

   g) Interpolar $f(x)$ usando el "Splines" cúbicos naturales y sujetos. Lo pueden hacer de cualquiera de las siguientes maneras:

   - Para esto construya directamente en listas de listas los sistemas de ecuaciones vistos en clase y resuélvalos usando usando el comando `Solve` de MATHEMATICA.
   - Programe directamente los algoritmos vistos en clase[1].

   Repita lo mismo pero que la función reciba como parámetro a la función a interpolar f.

   Luego en general programe una función que permita graficar el polinomio de interpolación y la función correspondiente (si la hay).

2. Para el polinomio de **Bernstein** $B_n(x)$ hacer lo siguiente:

   a) Demostrar que para $k \leq n$ se tiene

   $$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k}$$

   b) Pruebe que, para todo $n \in \mathbb{N}$

   $$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

   c) Use (b) y (c) para probar que para $f(x) = x^2$

   $$B_n(x) = \left(\frac{n-1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x$$

3. Dada la siguiente tabla de datos para $f(x)$

x	$f(x)$
0,2	0,9798652
0,4	0,9177710
0,6	0,8080348
0,8	0,6386093
1,0	0,3843735

   aproxime $f(0{,}5)$ usando el procedimiento `Neville`.

[1] Los splines sujetos se presentan en el documento `SplinesSujetos.pdf`.

4. *a*) Use el algoritmo de Neville para aproximar $f(1{,}03)$ con $P_{0,1,2}$ para la función $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$ usando $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}05$ y $x_2 = 1{,}07$.

   b) Suponga que la aproximación en (a) no es suficientemente exacta. Calcule $P_{0,1,2,3}$ donde $x_3 = 1{,}04$.

   c) Compare el error real en (a) y (b) con la cota del error teórica según los teoremas vistos en clase.

5. Repita el ejercicio anterior usando el polinomio de interpolación de Hermite, compare resultados.

6. Use el algoritmo de Diferencias Divididas para construir el polinomio interpolante de grado 4 según la siguiente tabla

x	$f(x)$
0,0	$-7{,}00000$
0,1	$-5{,}89483$
0,3	$-5{,}65014$
0,6	$-5{,}17788$
1,0	$-4{,}28172$

   Grafique éste polinomio.

7. Use el algoritmo de Hermite para construir el polinomio interpolante de Hermite dada la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0,2	0,9798652	0,20271
0,4	0,9177710	0,42279
0,6	0,8080348	0,68414
0,8	0,6386093	1,02964
1,0	0,3843735	1,55741

   Grafique éste polinomio.

8. Use el algoritmo de Difirencias Dividas para calcular el polinomio de interpolación de Lagrange $p(x)$ de cuarto grado para:

$$f(x) = x^3 \sin(x)$$

   con nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 5$.

   Grafique en un mismo plano $f(x)$ y $p(x)$ y luego imprima.

9. Probar que los polinomios $L_{n,k}(x)$ vistos en clase se pueden expresar de la forma:

$$L_{n,k}(x) = \frac{\psi(x)}{(x - x_k)\psi'(x_k)}$$

   donde:

$$\psi(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

   y que por lo tanto el polinomio interpolante de Lagrange se puede expresar como

$$p(x) = \psi(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\psi'(x_k)}$$

10. Demostrar que si $f(x)$ en un polinomio de grado menor o igual a n, entonces el polinomio de grado menor o igual n que interpola $f(x)$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ es el mismo $f(x)$.

11. Usar el ejercicio anterior para probar que:

$$\sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) = 1$$

12. Para las siguientes funciones

   - $f(x) = 3x^2 \ln(x) + 2x$ con nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2{,}5$ y $x_4 = 3$.
   - $f(x) = x^2 \sin(x) - 3\cos(x)$ con nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 5$.
   - $f(x) = x\cos(x) - 2x^2 + 3x - 1$ con nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 5$.

   a) Halle el polinomio de interpolación de Lagrange $P^{\star}(x)$ en los nodos indicados, grafique $f(x)$ y $P^{\star}(x)$ en el mismo plano.

   b) Halle el polinomio de interpolación usando Splines cúbicos $P^{\star\star}(x)$ en los nodos indicados, grafique $f(x)$ y $P^{\star\star}(x)$ en el mismo, luego imprima.

   c) Halle el polinomio de interpolación de Hermite $P^{\star\star\star}(x)$ en los nodos indicados, grafique $f(x)$ y $P^{\star\star}(x)$ en el mismo plano.

   d) Grafique $f(x)$, $P^{\star}(x)$ y $P^{\star\star}(x)$ $P^{\star\star\star}(x)$ en el mismo plano. ¿Que se puede concluir?

13. El objetivo de esta ejercicio es estudiar e implementar un algoritmo para *Aproximación discreta por mínimos cuadrados*, para esto:

   a) El problema en general es aproximar una tabla de datos $\{(x_i, y_i)$ tal que $i = 1, 2, \ldots, m\}$ por un polinomio de grado $n < m - 1$ denotado por $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. La idea es encontrar contantes $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ tal que se minimice el error:

   $$E = \sum_{i=1}^{m} (y_i - P_n(x_i))^2.$$

   Pruebe que este mínimo se alcanza en la solución del sistema de $(n+1)$ ecuaciones *normales* y $(n+1)$ incognitas $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ dado por:

   $$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j \quad \text{donde} \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

   b) Dada una tabla de datos para f escriba una función en Mathematica que permita generar el sistema de ecuaciones (1).

   c) Luego escriba una función en Mathematica que encuentre los coeficientes del polinomio de mínimos cuadrados y luego lo grafica.

   d) Construir la aproximación de mínimos cuadrados de grado 3 para la siguiente tabla y construya el gráfico.

x_i	y_i
4.0	102.56
4.2	113.18
4.5	130.11
4.7	142.05
5.1	167.53
5.5	195.14
5.9	224.87
6.3	256.73
6.8	299.50
7.1	326.72

14. El objetivo de este ejercicio es generalizar la aproximación discreta por mínimos cuadrados. Dada una función $f \in C[a,b]$ se requiere un polinomio $\widetilde{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ de manera tal que las contantes $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ minimicen el error:

$$E = \int_a^b (f(x) - \widetilde{P}_n(x))^2.$$

Pruebe que este mínimo se alcanza en la solución del sistema de $(n+1)$ ecuaciones *normales* y $(n+1)$ incognitas $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ dado por:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x) dx \quad \text{donde} \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

a) Dada una función f escriba una función en MATHEMATICA que permita generar el sistema de ecuaciones (2).

b) Luego escriba una función en MATHEMATICA que encuentre los coeficientes del polinomio $\widetilde{P}_n(x)$ y luego lo grafica.

c) Encuentre la aproximación polinómica $\widetilde{P}_n(x)$ de grado 2, 4, y 6 para $f(x) = \cos(\pi x)$ en el intervalo $[-1, 1]$. Además construya los gráficos.

15. *a*) Demuestre que el Polinomio de Hermite visto en clase $H_{2n+1(x)}$ es único. [Sugerencia: Suponga que existe otro polinomio $P(x)$ que cumple las condiciones de interpolación de Hermite y considere $D = H_{2n+1(x)} - P(x)$ y D' en $x_0, x_1, \ldots, x_n$.]

b) Demuestre que el error absoluto en este caso está dado por:

$$|f(x) - H_{2n+1}(x)| = \left| \frac{(x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \right|, \text{ con } \xi \in]a, b[.$$

Sugerencia: Use el mismo método que usamos para demostrar la fórmula del error absoluto en el caso de Lagrange, pero con:

$$g(t) = f(t) - H_{2n+1(t)} - \frac{(t-x_0)^2 \cdots (t-x_n)^2}{(x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2} \left[f(x) - H_{2n+1(x)} \right].$$