MA0501 Análisis Numérico I
Prof: Oldemar Rodríguez Rojas
Fecha de entrega: Martes 14 de octubre del 2014.

Tarea Número 4

1. Desarrolle funciones *iterativas y recursivas* en MATHEMATICA para los algoritmos de los métodos de: iteración de punto fijo, bisección, método de Newton–Raphson, método de la secante y el método de Steffensen vistos en clase, y el método Regula–Falsi que se describe en el ejercicio 9.

2. Use el procedimiento `Bisección` para resolver las siguientes ecuaciones, con por lo menos 5 dígitos significativos. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente MATHEMATICA.

   a) $\cos^2(x) = 2\sin(x) \quad$ para $0 \leq x \leq 1$.

   b) $-x^3 + x + 1 = 0 \quad$ para $1 \leq x \leq 2$.

   Para cada una de las ecuaciones anteriores, de acuerdo con los teoremas de error vistos en clase, calcule el número de iteraciones necesarias para obtener la precisión pedida, compare éstos resultados con los obtenidos con MATHEMATICA.

3. Use el procedimiento `Bisección` para resolver las siguientes ecuaciones, con por lo menos 4 dígitos significativos. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente MATHEMATICA.

   a) $e^x + 4x - 5 = 0$.

   b) $x^4 - 2x - 1 = 0$.

   Determine gráficamente un intervalo inicial $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{Z}$.

4. Para cada una de las siguientes ecuaciones, determinese el intervalo $[a, b]$ en el cual la iteración de punto fijo converge. Estime el número de iteraciones necesarias para obtener aproximaciones con 5 dígitos significativos, y efectue los cálculos con el procedimiento `PuntoFijo`. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente MATHEMATICA.

   a) $e^{-x} - x = 0$.

   b) $e^x = 3x$.

5. Repita el ejercicio anterior usando el método de Steffensen.

6. Para cada una de las siguientes ecuaciones, determine una función g y un intervalo $[a, b]$ en el cual la iteración de punto fijo converja a una solución positiva de la ecuación, debe probar que $g(x)$ cumple las hipótesis del teorema de Banach. Encuentre ésta solución usando el procedimiento `PuntoFijo`. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente MATHEMATICA.

   a) $3x^2 - e^x = 0$.

   b) $x - \cos(x) = 0$.

   a) Considere la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$, encuentre una función $g(x)$ que permita resolver ésta ecuación en el intervalo $[0, 7]$ utilizando el algoritmo del `Punto Fijo`. Debe probarse que $g(x)$ cumple la hipótesis del teorema visto en clase.

   b) Determine usando el estimado del error a priori y a posterioricuántas iteraciones se requieren para que el error absoluto sea menor a $\epsilon = 10^{-6}$ si se toma $p_0 = 0$.

7. Use el procedimiento `Newton` para resolver las siguientes ecuaciones, con por lo menos 4 dígitos significativos. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente MATHEMATICA.

   a) $\cos(x) - x^2 = 0$.

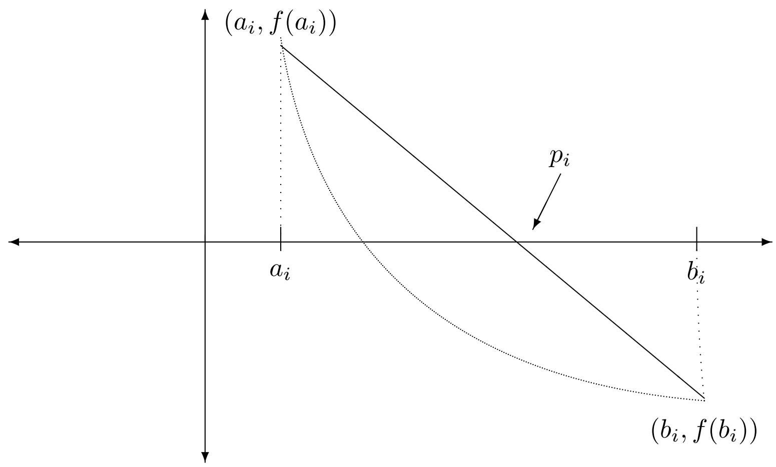
   b) $4\sin(x) = e^x$.

8. Repita el ejercicio anterior con el procedimiento `Secante`, compare los resultados.

9. **Método Regula Falsi:** Este es otro método para encontrar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ que se encuentra en el intervalo $[a, b]$. El método es similar a el de la bisección en que se generan intervalos $[a_i, b_i]$ encerrando la raíz de $f(x) = 0$ y es similar al método de la secante en la forma de obtener los nuevos intervalos aproximados.

   Suponiendo que el intervalo $[a_i, b_i]$ contiene una raíz de $f(x) = 0$, calculamos la intersección con el eje x y la recta que pasa por los puntos $(a_i, f(a_i))$ y $(b_i, f(b_i))$, denotando éste punto por p_i. Si $f(p_i)f(a_i) < 0$, se define $a_{i+1} = a_i$ y $b_{i+1} = p_i$, en caso contrario se define $a_{i+1} = p_i$ y $b_{i+1} = b_i$.

   a) Dé una interpretación geométrica del método Regula Falsi con ayuda del siguiente gráfico



   b) Cálcule la ecuación de la recta que pasa por $(a_i, f(a_i))$ y $(b_i, f(b_i))$.

   c) Pruebe que:

$$p_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

   d) Escriba un algoritmo en pseudocódigo para el método *Regula Falsi.*

   e) Escriba una función en MATHEMATICA para éste algoritmo.

10. Use el método de *Regula Falsi* para aproximar la solución de las siguientes ecuaciones con 6 dígitos significativos, determine el intervalo inicial gráficamente. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente MATHEMATICA.

    a) $\log(1 + x) - x^2 = 0.$

    b) $x^3 + 2x - 1 = 0.$

11. Pruebe que la sucesión construida por:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{a + (m-1)x_n^m}{m x_n^{m-1}} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

    converge a $\sqrt[m]{a}$, con $a > 0$.

12. Demuestre que las siguientes sucesiones (x_n) convergen linealmente a $x = 0$. Encuentre cuántos términos deben generarse antes de que $|x_n - x| \leq 5 \times 10^{-2}$.

    a) $x_n = \dfrac{1}{n} \quad n \geq 0.$

    b) $x_n = \dfrac{1}{n^2} \quad n \geq 0.$

13. Demuestre que la sucesión definida por $x_n = 1/n^k$, $n \geq 1$, para cualquier entero positivo k, converge linealmente a $x = 0$. Para cada par de enteros k y m, determinar un número N para el cual $1/N^k < 10^{-m}$.

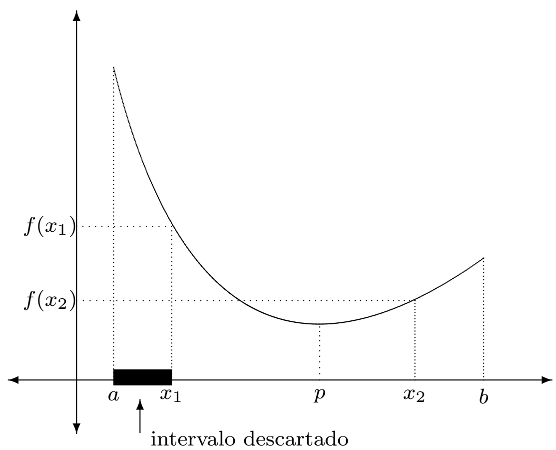
14. Demostrar que la sucesión $x_n = 10^{-2^n}$ converge cuadráticamente a cero.

15. Para la siguientes sucesiones (x_n), linealmente convergentes, use el método Δ^2 de Aitken para generar una sucesión $(\overline{x}_n)$ hasta que $|\overline{x}_n - x| \leq 5 \times 10^{-2}$.

    a) $x_n = \dfrac{1}{n} \quad n \geq 0.$

    b) $x_n = \dfrac{1}{n^2} \quad n \geq 0.$

16. Un conocido método numérico para minimizar funciones *estrictamente unimodales* (una función f que decrece estrictamente (que crece estrictamente) hasta su punto mínimo, (máximo) se llama la función *estrictamente unimodal*) en un intervalo $[a, b]$ es el *Método Igualmente Espaciado*, la idea geométrica de éste se ilustra en el siguiente gráfico:



Se toma $a_1 = a$ y $b_1 = b$ y además:

$$x_1 := \frac{2a + b}{3}, \qquad x_2 := \frac{a + 2b}{3}$$

Entonces, como se ilustra en el gráfico:

Si $f(x_1) > f(x_2)$ entonces se toma:

$$a_2 = x_1, \qquad b_2 = b_1, \qquad p_1 = a_2$$

y entonces el nuevo intervalo es $[a_2, b_2] = [x_1, b_1] = \left[\frac{2a_1+b_1}{3}, b_1\right]$.

en caso contrario se toma:

$$a_2 = a_1, \qquad b_2 = x_2, \qquad p_1 = b_2$$

y entonces el nuevo intervalo es $[a_2, b_2] = [a_1, x_2] = \left[a_1, \frac{a_1+2b_1}{3}\right]$

Con el nuevo intervalo se aplica el proceso de nuevo, y así sucesivamente hasta que a_n y b_n estén suficientemente cerca. La sucesión (p_n) converge al punto p donde f alcanza el mínimo.

a) De acuerdo con lo anterior pruebe que $x_1 < x_2$.

b) Construya un algoritmo en pseudocódigo y la correspondiente función MATHEMATICA para el método *Igualmente Espaciado* descrito anteriormente.

c) Pruebe que el intervalo construido con el algoritmo anterior satisface la relación:

$$|b_n - a_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (b-a)$$

¿Qué se puede concluir, respecto al error absoluto?

d) ¿Cuántas iteraciones se requieren teóricamente para minimizar $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$ en el intervalo $[1, 4]$ si se desea que el resultado tenga un error absoluto menor a 10^{-5}? Encuentre el mínimo.

17. En este ejercicio se presenta el *Método Dicotómico* para minimizar funciones estrictamente unimodales. En este método primeramente se evalua la función $f(x)$ en dos puntos que están a una distancia de $\varepsilon/2$ del punto medio del intervalo $[a, b]$, es decir se calculan:

$$f\left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right) \quad \text{y} \quad f\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right),$$

y se procede a compararlos. Si

a)

$$f\left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right) \quad \leq \quad f\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right),$$

entonces se descarta el intervalo $\left]\frac{a+b+\varepsilon}{2}, b\right]$ y así el punto mínimo $x^\star$ debe estar en el intervalo $\left[a, \frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$, el cual será el nuevo intervalo de búsqueda. Si

$$f\left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right) \quad > \quad f\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right),$$

entonces se descarta el intervalo $\left[a, \frac{a+b-\varepsilon}{2}\right[$ y en este caso el punto mínimo $x^\star$ debe estar en el intervalo de búsqueda $\left[\frac{a+b-\varepsilon}{2}, b\right]$. Pruebe que en cualquiera de los casos la longitud del intervalo de búsqueda se reduce de $b-a$ a $\frac{b-a+\varepsilon}{2}$.

b) Suponga que se tiene el caso

$$f\left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right) \quad \leq \quad f\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right),$$

entonces se descarta el intervalo $\left]\frac{a+b+\varepsilon}{2}, b\right]$, y el nuevo intervalo de búsqueda es $\left]a, \frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$. Ahora se debe calcular

$$f\left(\frac{3a+b-\varepsilon}{4}\right) \quad \text{y} \quad f\left(\frac{3a+b+3\varepsilon}{4}\right),$$

y surgen de nuevo dos posibilidades, si

$$f\left(\frac{3a+b-\varepsilon}{4}\right) \quad \leq \quad f\left(\frac{3a+b+3\varepsilon}{4}\right),$$

entonces se descarta el intervalo $\left]\frac{3a+b+3\varepsilon}{4}, \frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$ y el nuevo intervalo de búsqueda es $\left[a, \frac{3a+b+3\varepsilon}{4}\right]$. En el otro caso se descarta el intervalo $\left[a, \frac{3a+b-\varepsilon}{4}\right]$ y el nuevo intervalo de búsqueda es $\left[\frac{3a+b-\varepsilon}{4}, \frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$. Pruebe que en cualesquiera de los casos la longitud del intervalo de búsqueda se reduce de $\frac{b-a+\varepsilon}{2}$ a $\frac{b-a+3\varepsilon}{4}$.

c) Repitiendo el proceso n veces deben calcularse

$$f\left(\frac{(2^n-1)\,a+b-\varepsilon}{2^n}\right) \quad \text{y} \quad f\left(\frac{(2^n-1)\,a+b+(2^n-1)\,\varepsilon}{2^n}\right),$$

pruebe que en cualquiera de los dos casos que surgen la longitud del intervalo de búsqueda es

$$\frac{b-a+(2^n-1)\,\varepsilon}{2^n}.$$

Con lo cual, si x_n representa la $n-$ésima aproximación del punto mínimo $x^\star$ entonces, pruebe que:

$$|x^\star - x_n| \leq \frac{b - a + (2^n - 1)\,\varepsilon}{2^n}.$$

El proceso se ilustra en la Figuras 1 y 2.

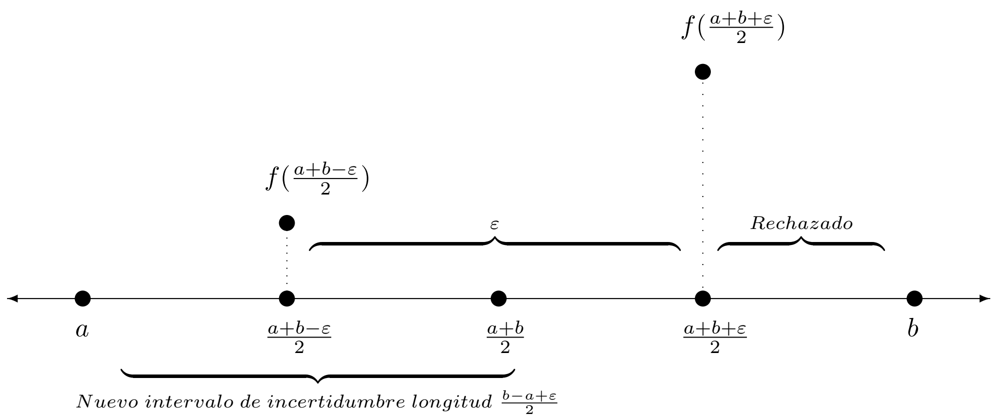


Figura 1

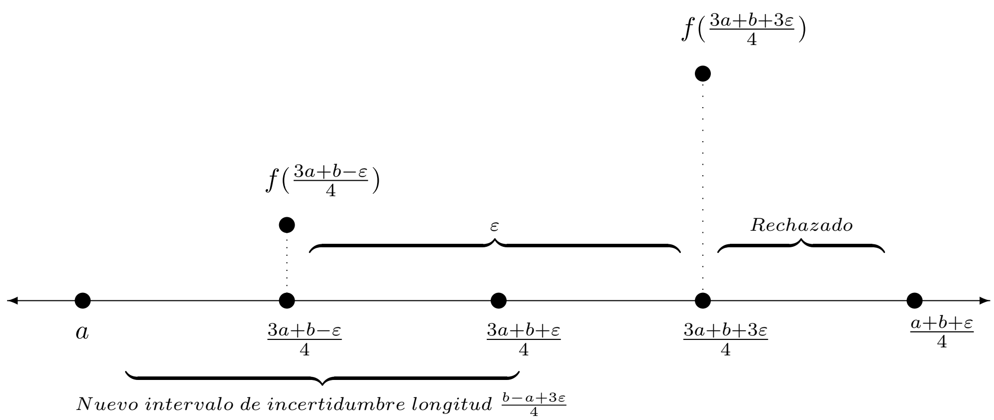


Figura 2

d) Construya un algoritmo en pseudocódigo y la correspondiente función MATHEMATICA para el *Método Dicotómico* descrito anteriormente.

e) ¿Cuántas iteraciones se requieren teóricamente para minimizar $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$ en el intervalo $[1, 4]$ si se desea que el resultado tenga un error absoluto menor a 10^{-5}? Encuentre el mínimo.

18. El objetivo de este ejercicio es demostrar la convergencia del método de Newton–Raphson sin utilizar el Teorema de punto fijo de Banach.

Teorema: Sea $f \in C^2[a, b]$. Si $x \in [a, b]$ con $f(x) = 0$ y $f'(x) \neq 0$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que el método de Newton–Raphson:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

genera una sucesión que está bien definida y converge a x cuando $n \to \infty$, para todo $x_0 \in [x - \epsilon, x + \epsilon]$.

Para esto haga lo siguiente:

a) Pruebe que si $(r_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión de números positivos o nulos que verifican:

$$r_{n+1} \leq r_n^2,$$

Pruebe que si $r_0 < 1$ entonces (r_n) converge a 0. Además pruebe que:

$$r_n \leq (r_0)^{2^n}.$$

b) Pruebe que:

$$x_{n+1} - x = \frac{(x_n - x)f'(x_n) - f(x_n) + f(x)}{f'(x_n)}. \tag{1}$$

c) Pruebe que existen números estrictamente positivos ϵ_1 y M tales que:

$$\text{para todo } y \in [x - \epsilon_1, x + \epsilon_1] \text{ se tiene que } |f'(y)| \geq M.$$

d) Justifique por qué:

$$\max_{y \in [x-\epsilon_1, x+\epsilon_1]} |f''(y)| := L < \infty.$$

e) Pruebe que el valor absoluto de la parte derecha del numerador de la ecuación (1) es igual a:

$$\left| \int_{x_n}^{x} f''(t)(x - t)dt \right|. \tag{2}$$

f) Pruebe que (2) está acotado por:

$$\frac{L}{2} |x_n - x|^2.$$

g) Pruebe que si se define $r_n := \dfrac{L|x_n - x|}{2M}$ entonces $r_{n+1} \leq r_n^2$.

h) Sea $\epsilon < \min\left(\epsilon_1, \dfrac{2M}{L}\right)$, pruebe que si $|x_n - x| < \epsilon$ entonces use la parte (a) para probar que $|x_{n+1} - x| < \epsilon$ y concluya el resultado.

19. Demuestre que en el caso de ceros de multiplidad m el **Método de Newton Modificado**

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

es cuadráticamente convergente. Sugerencia: Use series de Taylor.

20. El objetivo de este ejercicio es demostrar la convergencia del método de la Secante sin utilizar el Teorema de punto fijo de Banach.

Teorema: Sea f una función de clase $C^2[a, b]$ con $a < b$. Si existe un punto x tal que $f(x) = 0$ y $f'(x) \neq 0$ entonces existe un número $\epsilon > 0$ tal que si x_0 y x_1 están dentro del intervalo $[x - \epsilon, x + \epsilon]$ la sucesión generada por el método de la secante

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

está bien definida dentro del intervalo $[x - \epsilon, x + \epsilon]$ y converge a x (cero de la ecuación $f(x) = 0$).

a) Sea (r_n) una sucesión de números reales positivos tales que

$$r_{n+1} \leq r_n r_{n-1}.$$

Pruebe que si $r_0 < 1$ y $r_1 < 1$ entonces la sucesión (r_n) está acotada por 1 y converge a 0. Además pruebe que existe una constante C tal que:

$$r_n \leq C r^{\rho^n},$$

donde r es un número estrictamente menor que 1, y

$$\rho = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618.$$

b) Se denota:

$$f[x_n, x_{n-1}] := \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

pruebe que:

$$f(x_n) = (x_n - x)f[x_n, x].$$

c) Pruebe que:

$$x_{n+1} - x = (x_n - x)\frac{f[x_n, x_{n-1}] - f[x_n, x]}{f[x_n, x_{n-1}]}.$$

d) Pruebe que:

$$x_{n+1} - x = \frac{(x_n - x)\,(x - x_{n-1})\,f[x_n, x_{n-1}, x]}{f[x_n, x_{n-1}]},$$

donde:

$$f[x_n, x_{n-1}, x] := \frac{f[x_n, x_{n-1}] - f[x_{n-1}, x]}{x_n - x}.$$

e) Sea $[x - \epsilon_1, x + \epsilon_1]$ un intervalo sobre el cual $|f'(x)| \geq M$. Pruebe que si x_n y x_{n-1} están dentro del $[x - \epsilon_1, x + \epsilon_1]$ entonces:

$$|f[x_n, x_{n-1}]| \geq M.$$

f) Sea L la cota superior de $|f''|$ en el intervalo $[x - \epsilon_1, x + \epsilon_1]$. Pruebe que si x_n y x_{n-1} están dentro del $[x - \epsilon_1, x + \epsilon_1]$ entonces:

$$|f[x_n, x_{n-1}, x]| \leq \frac{L}{2}.$$

g) Pruebe que:

$$|x_{n+1} - x| \leq \frac{L}{2M}\,|x_n - x|\,|x_{n-1} - x|\,.$$

h) Tome:

$$r_n := \frac{L}{2M}\,|x_n - x| \qquad \text{y} \qquad \epsilon < \text{mín}\left(\epsilon_1, \frac{2M}{L}\right),$$

usando (a) concluya que si x_0 y x_1 están dentro del intervalo $[x - \epsilon, x + \epsilon]$ entonces x_n está dentro de este intervalo para todo n y $|x_n - x| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

21. Pruebe los Teoremas 7, 10, 11 y 12.