MA0501 Análisis Numérico I
Fecha de entrega: Martes 9 de Setiembre del 2014.

Tarea Número 3

1. Suponga que $p^\star$ aproxima a p con 3 dígitos significativos. Encuentre el intervalo en el cual $p^\star$ debe estar, si:

   (a) $p = 150$ (b) $p = 900$
   (c) $p = 1500$ (d) $p = 90$

2. Considere el los siguientes valores para p y $p^\star$

   (a) $p = \pi \quad p^\star = 3{,}1$ (b) $p = 1/3 \quad p^\star = 0{,}333$
   (c) $p = \frac{\pi}{1000} \quad p^\star = 0{,}0031$ (d) $p = \frac{100}{3} \quad p^\star = 33{,}3$

   ¿Cuál es el error absoluto y relativo al aproximar p por $p^\star$?

3. Sea $\alpha_n = \dfrac{n+10}{n^5}$, pruebe que

$$\alpha_n = 0 + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

   ¿Qué se puede concluir?

4. Suponga que $fl(x)$ es una aproximación de x con redondeo a k dígitos. Demuestre que:

$$\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| \leq 0{,}5 \times 10^{-k+1}$$

5. Si se calcula la raíz menor en valor absoluto de la ecuación:

$$f(x) = x^2 + 0{,}4002 \times 10^0 x + 0{,}8 \times 10^{-4} = 0$$

   con la fórmula cuadrática usual, entonces se produce una pérdida de dígitos significativos (¿Porqué?). Encuentre una para fórmula para efectuar este cálculo sin que se produzca tal pérdida y encuentre la raíz de menor magnitud.

6. Se dice que una matriz es **rala** si esta tiene más entradas nulas que no nulas (mayor estricto). Escriba un algoritmo en seudo–código que permita determinar si una matriz es rala. Escriba un procedimiento en Mathematica para este algoritmo.

7. Se dice que una matriz $A \in M_{n\times m}$ **tiene forma de O** si todas las entradas de la fila 1, fila n, columna 1 y columna m son no nulas, y las demás entradas de la matriz son nulas. Escriba un algoritmo en seudo–código que permita determinar si una matriz está en forma de O. Escriba un procedimiento en Mathematica para este algoritmo. ¿Es una matriz en forma de O, rala?

8. En el capítulo de análisis funcional complete las demostraciones de los teoremas 2, 4, 5, 14, 16 y de los ejemplos 3, 5.

9. En el teorema 7, si tomamos como espacio pre–Hilbert a $\mathbb{R}^n$ con el producto punto clásico, escriba una función en Mathematica que reciba una base de un subespacio de $\mathbb{R}^n$ en una lista de listas y retorne la base ortogonal en una lista de listas, luego otra función que calcule la base ortonormal.

10. Repita el ejercicio anterior usando los espacios y el producto interno del ejemplo 7. ¿Será posible hacer una función que reciba también como parámetro el producto interno como una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y genere la base ortogonal y ortonormal usando este producto interno?

11. En el Corolario 2, si tomamos como espacio pre–Hilbert a $\mathbb{R}^n$ con el producto punto clásico, escriba una función en Mathematica que reciba una base de un subespacio U de $\mathbb{R}^n$ en una lista de listas, un vector de $\mathbb{R}^n$ y retorne en una lista la mejor aproximación a ese vector en U.

12. Repita el ejercicio anterior usando los espacios y el producto interno del ejemplo 7. ¿Será posible hacer una función que reciba también como parámetro el producto interno como una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y genere la mejor aproximación usando este producto interno?

13. Pruebe que la función $f(x) = \sqrt{x+2}$ tiene un punto fijo único en $[0, 7]$.

14. Sea $f : X \to X$ una aplicación. Denotamos por F_f el conjunto de puntos fijos de la aplicación f. Pruebe las siguientes propiedades:

    (a) Sean $f, g : X \to X$ aplicaciones tales que $f \circ g = g \circ f$ entonces se tiene que:

    $$f(F_g) \subset F_g,$$

    $$g(F_f) \subset F_f.$$

    (b) Sean $f, g : X \to X$ aplicaciones, si $F_g = \{x^*\}$ y $f \circ g = g \circ f$ entonces $F_f \neq \emptyset$.

    (c) Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \to X$ aplicación. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F_{f^n} = \{x^*\}$ entonces $F_f = \{x^*\}$.

    (d) Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \to X$ aplicación. Si $F_f \neq \emptyset$ entonces $F_{f^n} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (e) Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \to X$ aplicación sobreyectiva, supóngase que $f_d^{-1} : X \to X$ es tal que $f \circ f_d^{-1} = I_X$ y $F_{f_d^{-1}} \neq \emptyset$ entonces $F_f \neq \emptyset$.

    (f) Sea A un conjunto con un número impar de elementos y $f : A \to A$ tal que $f^2(x) = x$ para todo $x \in A$, se tiene entonces que $F_f \neq \emptyset$.

    (f) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con f continua y acotada entonces $F_f \neq \emptyset$.

    (g) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con f continua y periódica entonces $F_f \neq \emptyset$.